

INSTITUT DE FORMATION ET DE RECHERCHE DÉMOGRAPHIQUES

ÉPREUVE DE PROBABILITÉS - STATISTIQUES

(Concours type B (Octobre 2014))

Exercice 1

Un examen est ouvert à des étudiants de formations initiales différentes : économie, statistique, mathématiques. Le tableau ci-après présente les résultats obtenus par 286 candidats à cet examen.

Résultat de l'examen	Formations initiales			
	Économie	Statistique	Mathématiques	Total
Réussite	41	59	54	154
Echec	21	36	75	132
Total	62	95	129	286

- Parmi les 154 candidats qui ont réussi à l'examen
 - Quel est le pourcentage des économistes ?
 - Quel est le pourcentage des statisticiens ?
 - Quel est le pourcentage des mathématiciens ?
- Parmi les 286 candidats qui se sont présentés à l'examen
 - Quel est le pourcentage des économistes qui ont réussi à l'examen ?
 - Quel est le pourcentage des statisticiens qui ont réussi à l'examen ?
 - Quel est le pourcentage des mathématiciens qui ont réussi à l'examen ?
- Si on désigne par taux de réussite le pourcentage des étudiants qui ont réussi à l'examen. déterminer le taux de réussite :
 - Quelle que soit la formation initiale du candidat
 - chez les économistes
 - chez les statisticiens
 - Chez les mathématiciens

- e) Représenter graphiquement les taux de réussite selon la formation initiale
4. Le responsable de l'examen désire savoir si la formation initiale d'un étudiant influe sur sa réussite. Quelle est sa conclusion au seuil de 5% ?

Exercice 2

On dispose, pour un secteur industriel donné et sur une période de 11 années, de la série du nombre de salariés Y et du chiffre d'affaires X du secteur.

Année	Nombre de Salariés (en milliers) Y	Chiffre d'affaires (en millions) X
1957	294	624
1958	271	661
1959	314	728
1960	356	782
1961	383	819
1962	369	819
1963	402	938
1964	422	1023
1965	475	1136
1966	475	1227
1967	486	1317

On veut tester la réalité d'une relation linéaire entre Y et X,

soit : $y_n = a + bx_n + \varepsilon_n$ ($n = 1$ à 11). Les hypothèses classiques du modèle linéaire simple sont supposés réalisées, c'est-à-dire que ε_n est une variable aléatoire suivant une loi normale centrée d'écart-type σ , $N(0, \sigma)$.

- Donner les estimations $\hat{a}$ et $\hat{b}$ des paramètres a et b obtenues par la méthode des moindres carrés ordinaires
- Calculer :
 - l'estimateur de la variance σ^2
 - l'estimation de la variance de l'estimateur $\hat{b}$
 - le coefficient de détermination R^2 de la régression
- On se pose le problème de test : $H_0 : b = 0$
 $H_1 : b \neq 0$

- a) A quelle question ce test répond-t-il ?
- b) Peut-on dire que b est significativement différent de zéro au risque $\alpha = 0,05$?
- 4. On suppose que, connu de façon exogène, le chiffre d'affaires en 1970 est de 1772 millions.
 - a) Sur la base de la relation estimée jusque là à partir des données fournies, à combien de salariés peut-on s'attendre en 1970 ?
 - b) Sur la seule base de la relation linéaire estimée jusque là à partir des données fournies, à combien de salariés peut-on s'attendre en 1970 ?
 - c) Trouver un intervalle de confiance de niveau 0,95 pour l'effectif salarié du secteur.
 - d) A posteriori, on dénombre en 1970, 514 000 salariés. Que peut-on déduire de cette observation supplémentaire ?

Exercice 3

Une compagnie d'assurance A assure 1000 clients pour un sinistre de type S. Chaque client indépendamment des autres a, au cours d'une année, une probabilité de 0,001 d'être sinistré. Le coût unitaire du remboursement du sinistre s'élève à 10 millions de francs. La compagnie d'assurance règle le 31 décembre, sur ses réserves, le montant du remboursement des sinistres de l'année et souhaite pouvoir honorer ses engagements avec une probabilité de 0,999.

1. a) Déterminer la loi exacte de nombre X de sinistres constaté en une année
 - b) Donner l'espérance et la variance de X .
2. Par quelle loi, cette loi exacte peut-elle être approximée ?
3. Après avoir déterminé, à partir cette loi, la valeur X_0 telle : $p(x \geq x_0) > 0,001$ et $p(x \geq x_0 + 1) < 0,001$. donner le montant des réserves que doit posséder la compagnie d'assurance pour honorer ses engagements avec une probabilité de 0,999
4. Une deuxième compagnie, la compagnie d'assurance B, ayant les mêmes caractéristiques propose à la compagnie A de fusionner avec elle.
 - a) Déterminer la loi exacte du nombre Z des sinistres constatés en une année parmi l'ensemble des 2000 clients, ainsi que la loi approchée de Z .

- b) -Déterminer le montant des réserves que doivent posséder ensemble les deux compagnies si elle fusionnent et continuent d'honorer leurs engagements avec une probabilité de 0,999.
- Comparer ce montant à celui des réserves dont devraient disposer les deux compagnies non fusionnées.

Exercice 4

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n . On effectue p tirages avec remise. Soit X la variable aléatoire réelle égale au plus grand numéro tiré. Déterminer la loi de X .

Exercice 5

Soit (X_n) , n étant un entier naturel non nul, une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $E(X_n) = m$ et $V(X_n) = \sigma^2$. Montrer que si m est inconnu alors

$$T_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(X_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \right)^2$$

est un estimateur sans biais de σ^2

Exercice 6

Les assistants sociaux travaillant pour une clinique psychiatrique sont si occupés qu'en moyenne seuls 60% des patients prospectifs téléphonant pour la première fois obtiendront une communication avec l'un des assistant. On demande aux autres de laisser leur numéro de téléphone.

Trois fois quatre, un assistant trouve le temps de rappeler encore le jour même, autrement le rappel a lieu le lendemain.

L'expérience a montré que dans cette clinique, la probabilité que le patient prospectif demande une consultation est 0,8 s'il a pu parler immédiatement à un assistant, tandis qu'elle tombe à 0,6 et 0,4 respectivement s'il y a eu rappel du patient le jour même ou le lendemain.

- 1) Quel est le pourcentage parmi les gens qui appellent demanderont-ils une consultation ?
- 2) Quel pourcentage des gens en consultation n'ont pas eu à attendre qu'on les rappelle ?

INSTITUT DE FORMATION ET DE RECHERCHE DÉMOGRAPHIQUES
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
(Concours type B (Octobre 2014))

Exercice 1

Soit la matrice B donnée par : $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calculer B^n pour $n \geq 0$.

b) On considère la suite de matrices $A_p = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{p} \\ -\frac{a}{p} & 1 \end{pmatrix}$
Donner la limite de A_p lorsque p tend vers l'infini.

Exercice 2

Résoudre et discuter les systèmes d'équations ci-après

1.
$$\begin{cases} x + \alpha y + \alpha^2 z = 0 \\ \bar{\alpha} + y + \alpha z = 0 \\ \bar{\alpha}^2 x + \bar{\alpha} y + z = 0 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x + y + z = m + 1 \\ mx + y + (m - 1)z = m \\ x + my + z = 1 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x + y + z = m + 1 \\ mx + y + (m - 1)z = m \\ x + my + z = 1 \end{cases}$$

Exercice 3

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\prod_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{k}{n}} \right)^{\sin(2 \prod \sqrt{n^2+1})}$

Exercice 4

Soit un réel α un réel tel que $\alpha > 1$. Pour tout entier n non nul. On pose :

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha}, v_n = \frac{1}{n^\alpha - 1} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}.$$
$$S_n = u_1 + \dots + u_n \text{ et } T_n = v_1 + \dots + v_n$$

1. Montrer que la suite (T_n) converge et préciser sa limite.

2. a) Monter qu'il existe, pour tout $n \geq 1$, $x_n \in]n; n+1[$ / $v_n = \frac{(\alpha-1)}{x^n}$

b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$

– En déduire que la suite (S_n) converge

Exercice 5

On définit pour deux réels strictement positifs a et b , une fonction $f_{a,b}$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par la formule :

$$\forall x > 0, f_{a,b} = \frac{1 - e^{-ax} \sqrt{1+x}}{x^b}$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les réels a et b pour que $f_{a,b}$ soit intégrable sur $]1, +\infty[$
2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les réels a et b pour que $f_{a,b}$ soit intégrable sur $]0, +\infty[$?

Exercice 6

On considère l'équation différentielle :

$$xy' + (x-1)y + y^2 = 0$$

(E)

- 1) Soit y une solution de l'équation (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, ne s'annulant pas sur ces intervalles.
 - a) Écrire l'équation différentielle (E') vérifiée par la fonction $u = \frac{1}{y}$.
 - b) Résoudre (E') puis (E).
- 2) Monter que l'équation (E) possède une solution f et une seule, définie sur $\mathbb{R}$, telle que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq 0$
- 3) Étudier brièvement les variations de f et tracer son graphe dans un repère orthonormé.